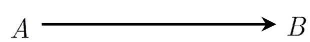
Chương 1 VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VÉCTƠ

§ 1, 2, 3. VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VÉCTƠ

☆☆☆

① **<u>Các định nghĩa mở đầu</u>**

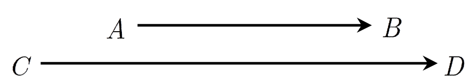
- Véctơ là 1 đoạn thẳng có hướng: $\begin{cases} \circ \text{ Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.} \\ \circ \text{ Hướng từ gốc đến ngọn, gọi là hướng của véctơ.} \\ \circ \text{ Độ dài của véctơ là độ dài đoạn thẳng xác định bởi} \\ \quad \text{điểm đầu và điểm cuối của véctơ.} \end{cases}$



- Véctơ có gốc A, ngọn B được ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véctơ. Ngoài ra, véctơ còn được kí hiệu bởi một chữ cài in thường phía trên có mũi tên như $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$,... độ dài của $\vec{a}$ kí hiệu là $|\vec{a}|$.

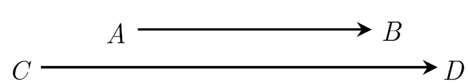
- Véctơ không, kí hiệu $\vec{0}$ có: $\begin{cases} \circ \text{ Điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau.} \\ \circ \text{ Độ dài bằng 0.} \\ \circ \text{ Hướng bất kỳ.} \end{cases}$

- Hai véctơ cùng phương khi chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song nhau: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB \parallel CD. \\ A,\, B,\, C,\, D:\ \text{thẳng hàng.} \end{array}\right.$



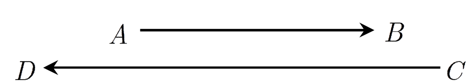
- Hướng của hai véctơ: Hai véctơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét hướng của hai véctơ khi chúng cùng phương.
  - ○ Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng, ký hiệu:

    $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \circ\ AB \parallel CD. \\ \circ \text{ Hai tia } AB,\, CD \text{ cùng hướng.} \end{cases}$



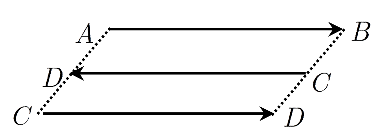
  - ○ Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng, ký hiệu:

    $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \circ\ AB \parallel CD. \\ \circ \text{ Hai tia } AB,\, CD \text{ ngược hướng.} \end{cases}$



- Hai véctơ được gọi là bằng nhau khi chúng cùng hướng (cùng phương, cùng chiều) và cùng độ dài.

  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng.} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \text{ hay } AB = CD. \end{cases}$

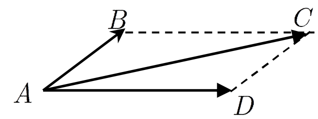


- Hai véctơ được gọi là đối nhau khi chúng ngược hướng và cùng độ dài.

② **<u>Các phép toán trên véctơ</u>**

a) Tổng của hai véctơ

- Hệ thức Chasles (quy tắc ba điểm hay quy tắc tam giác):
  - Với ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
  - Quy tắc ba điểm còn được gọi là hệ thức Chasles dùng để cộng các véctơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều véctơ như sau:
  $\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$



- Quy tắc hình bình hành
  - Cho hình bình hành $ABCD$ thì $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\end{array}\right.$.
  - Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các véctơ chung gốc.
- Tính chất: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},\quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

b) Hiệu hai véctơ

- Véctơ đối: $\left\{\begin{array}{l}\circ\ \text{Véctơ đối của véctơ } \vec{a},\ \text{kí hiệu là } -\vec{a}.\\ \circ\ \text{Tổng của hai véctơ đối là véctơ } \vec{0}:\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.\end{array}\right.$
- Hiệu hai véctơ: với ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

c) Tích của một số với một véctơ

- Định nghĩa: cho một số thực $k \neq 0$ và một véctơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khi đó:
  Tích $k.\vec{a}$ là một véctơ có $\left\{\begin{array}{l}k.\vec{a}:\ \text{cùng hướng với } \vec{a} \text{ khi } k > 0.\\ k.\vec{a}:\ \text{ngược hướng với } \vec{a} \text{ khi } k < 0.\end{array}\right.$
- Tính chất: $k.(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b},\ (k + h).\vec{a} = k.\vec{a} + h.\vec{a}\ (-1).\vec{a} = -\vec{a},\ 0.\vec{a} = \vec{0}$.
- Điều kiện để hai véctơ $\vec{a},\ \vec{b},\ (\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là $\exists\ k \in \mathbb{R}$ để $\vec{a} = k.\vec{b}$.
- Điều kiện để 3 điểm $A,\ B,\ C$ thẳng hàng là $\exists\ k \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

③ Tính chất trung điểm và trọng tâm tam giác

a) Tính chất trung điểm

Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ thì ta luôn có: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

b) Tính chất trọng tâm

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ, khi đó ta luôn có:
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

④ Biểu thị một véctơ thông qua hai véctơ không cùng phương

Cho hai véctơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi véctơ $\vec{c}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số thực m và n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Dạng toán 1: Chứng minh đẳng thức véctơ

☆☆☆

Phương pháp:

Sử dụng quy tắc ba điểm (hệ thức Chasles), quy tắc hình bình hành, hệ thức trung điểm, hệ thức trọng tâm kết hợp với các tính chất phép cộng, phép trừ, phép nhân để biến đổi tương đương cho biểu thức cần chứng minh. Khi đó ta có các hướng sau:

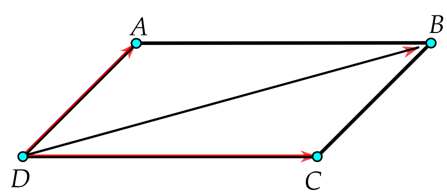
— **Hướng 1**. Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức. Còn nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện phép phân tích véctơ.

— **Hướng 2**. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng (chẳng hạn: hệ thức trung điểm, trọng tâm,…). Hoặc ngược lại, biến đổi một đẳng thức véctơ là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

① **Quy tắc ba điểm**: Chèn C vào véctơ $\overrightarrow{AB}$

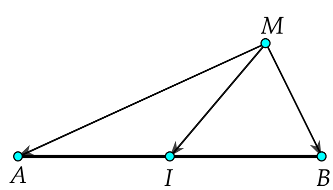
- Cộng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ (chèn giữa). • Trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ (C cuối $-$ C đầu)

② **Quy tắc hình bình hành**: Cho hình bình hành $ABCD$ (quy tắc đường chéo hbh):



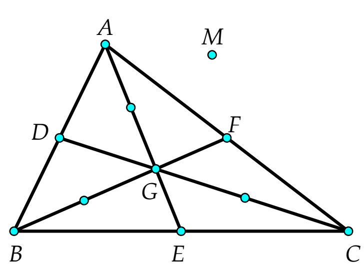
$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.$$

③ **Tính chất trung điểm**: Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ.



$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$

④ **Tính chất trọng tâm**: G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ.



- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$

Cần nhớ: G chia AE thành ba đoạn bằng nhau, tức có: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}.$

BT 1. Cho 5 điểm $A,\ B,\ C,\ D,\ E$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

Cách 1. Biến đổi vế trái theo vế phải

Vế trái $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA})$

$=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA})$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=$ vế phải (đpcm).

Cách 2. Biến đổi vế phải theo vế trái.

Vế phải $=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{EA}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=$ vế trái (đpcm).

Cách 3. Giả sử ta luôn có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{ED})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$: luôn đúng.

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

Cách 1. ....

Cách 2. ....

Cách 3. ....

BT 2. Cho các điểm bất kì. Hãy chứng minh đẳng thức:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

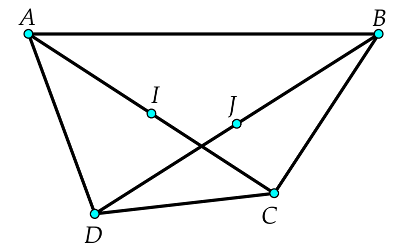
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.	f) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.
g) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.	h) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.
i) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.	j) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

BT 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

Vế trái $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB})+(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD})$

$=\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}=$ vế phải (đpcm).

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{IJ}$.

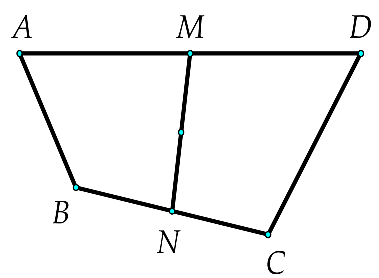
Theo câu a), ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (1)

Cũng theo câu a), ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=$ ....

.... (2)

Cộng vế theo vế, ta được: ....

BT 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AD, BC.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

Ta có: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}$

$=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}}_{\vec{0}}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ (đpcm)

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MN}$.

....

....

....

....

c) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

....

....

....

....

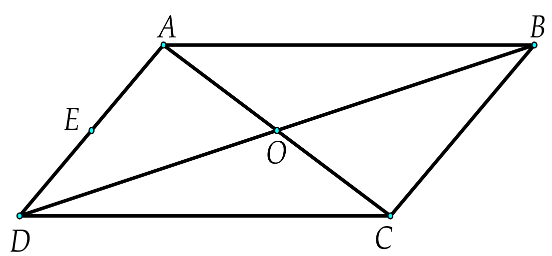
....

BT 5. Cho tam giác ABC, gọi M trung điểm của BC và I trung điểm của AM.

a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Với O điểm bất kì. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

BT 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Chứng minh:



a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}$.

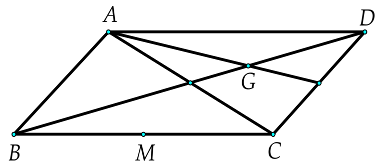
c) $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}$.

BT 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN=2MN$. Chứng minh rằng:

a) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}$.

b) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.$	c) $3\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD}.$

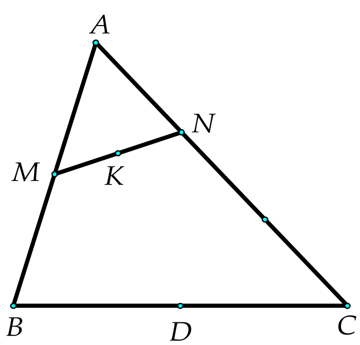
BT 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có M trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

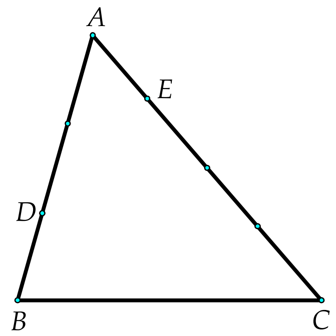
BT 9. Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm của BC và AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$ và gọi K là trung điểm của MN.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng: $12\overrightarrow{KD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

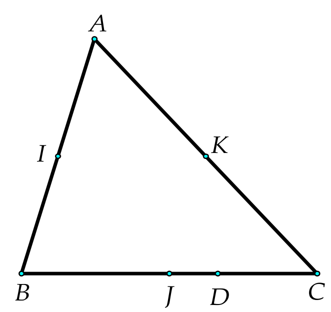
BT 10. Cho tam giác ABC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm của DE và I là trung điểm của BC.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

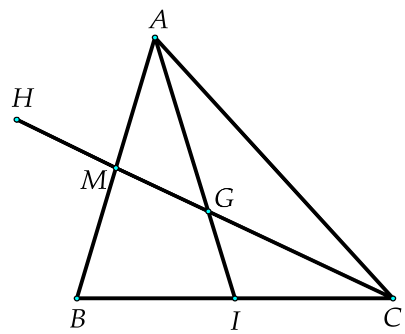
BT 11. Cho tam giác ABC với I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Gọi D thuộc đoạn BC sao cho $3DB = 2BC$ và M là trung điểm của AD.



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

BT 12. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G.

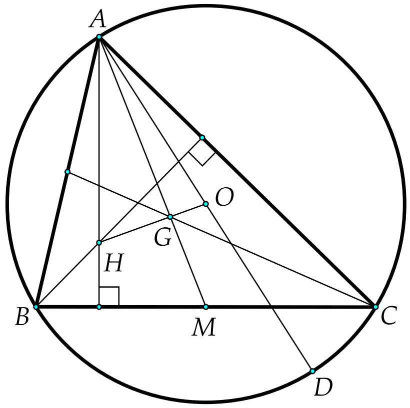


a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{HB} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

<u>BT 13.</u> Cho tam giác ABC gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC.



a) Chứng minh: $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

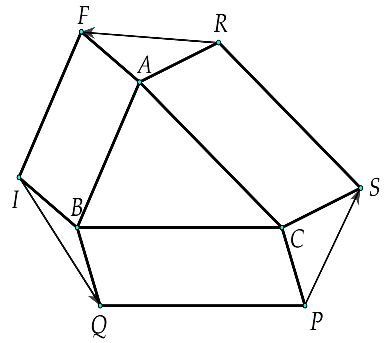
c) Chứng minh: $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

e) Chứng minh: $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) Chứng minh: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

BT 14. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Hình vẽ	*Lời giải tham khảo*
	Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{RF}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AF} \quad (1)\\ \overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ} \quad (2)\\ \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS} \quad (3)\end{cases}$ Cộng vế theo vế của $(1),(2),(3)$, ta được: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\underbrace{(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})}_{\vec{0}}$ Suy ra: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$ (đpcm).

BT 15. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng bên ngoài tứ giác các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

Hình vẽ	a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

BT 16. Chứng minh rằng các tam ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi đẳng thức sau được thỏa: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Lời giải tham khảo

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

Tương tự, G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên ta có: $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}.$

Do hai tam giác tam $ABC,\ A'B'C'$ có cùng trọng tâm $\Rightarrow G\equiv G'\Rightarrow \overrightarrow{GG'}=\vec{0}.$

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'})$$

$$=-\underbrace{(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})}_{\vec{0}}+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}.$$

$\Rightarrow$ Điều kiện cần và đủ để ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}.$

☞ **Nhận xét**. Để chứng minh hai điểm A và B trùng nhau, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$

BT 17. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Hình vẽ	Bài làm của học sinh

BT 18. Cho tam giác ABC và $I,\ J,\ K$ xác định bởi: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0},\ \ 2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA}=\vec{0}$ và

$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

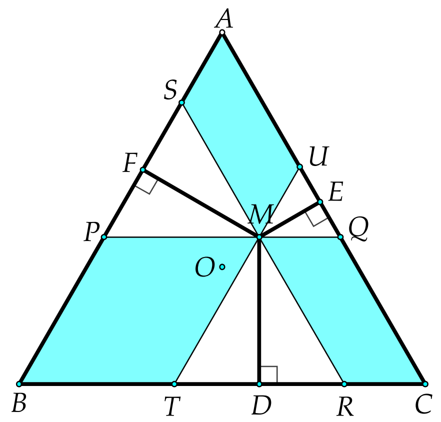
Hình vẽ	Bài làm của học sinh

BT 19. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Hình vẽ	Bài làm của học sinh

BT 20. Cho tam giác ABC đều tâm O và điểm M nằm bên trong tam giác. Gọi D, E, F là

hình chiếu của M trên $BC,\ AC,\ AB$. Chứng minh: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Hình vẽ	*Học sinh đọc & bổ sung lời giải*
	Từ điểm M dựng lần lượt các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác (như hình vẽ). Tức $PQ \parallel BC,\ SR \parallel AC,\ TU \parallel AB$. Khi đó: $\begin{cases} BP \parallel TM \\ PM \parallel BT \end{cases} \Rightarrow BPMT$ là hình bình hành. $\Rightarrow \overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}$. Tương tự $CRMQ, ASMU$ là các hình bình hành. $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA} \end{cases}$.

Ta có: $\widehat{PBT}=\widehat{MTR}=\widehat{QCR}=\widehat{MRT}=60^\circ$. Suy ra tam giác MTR là tam giác đều nên MD là trung tuyến $\Rightarrow D$ là trung điểm của đoạn thẳng $TR \Rightarrow 2\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MR}$ (1)

Tương tự: ....

....

....

Suy ra: $2\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MQ}$ (2)

Tương tự: ....

....

....

Suy ra: $2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MS}$ (3)

Ta lại có O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm bất kỳ nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$.

Cộng $(1),\ (2),\ (3) \Rightarrow 2\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MS}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF})=(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MQ})+(\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MS})$

....

....

....

....